

ПРИПРЕМА ЗА ЧАС

Школа и разред	Прва крагујевачка гимназија, IV ₇
Наставник	Ана Лаковић
Датум одржавања	04.04.2022.
Наставна тема	Интеграл
Наставна јединица	Геометријска примена одређеног интеграла- дужина лука криве.
Тип часа	Обрада
Облици рада	Фронтални, индивидуални, рад у паровима.
Наставне методе	Дијалогска, монолошка, илустративна
Наставна средства	Табла, фломастер, мобилни телефон, пројектор, електронска табла, уџбеник
Циљ часа	- Упознавање ученика са појмом дужине лука криве. - Повезати методе неодређене и одређене интеграције са израчунавањем дужине лука криве. - Успешно решавање задатака.
Исходи	Ученик ће моћи да: - примени одређени интеграл на израчунавање дужине лука криве. - примени тригонометријску смену, интеграл рационалне функције и методу смене код одређеног интеграла да би израчунао дужину лука криве.
Образовни стандарди	2.МА.3.3.6.
Међупредметне компетенције	Ученик развија: • компетенције за целоживотно учење; • комуникацију; • рад с подацима и информацијама; • сарадњу; • дигиталну компетенцију.

Активности наставника	Наставник уводи појам дужине лука криве, помаже ученицима да сами дођу до одређених закључака, поставља питања и одговара на питања ученика, илуструје решења уводних задатака и прати тачност решавања од стране ученика.
Активности ученика	Ученици прате наставника, дају промишљене одговоре на постављена питања, анализирају и закључују, решавају задатке, постављају питања, учествују у раду,
Литература	• Уџбеник-Математика са збирком задатака за 4. разред средње школе. Завод за уџбенике и наставна средства Београд, Београд 2010, Милутин Обрадовић, Душан Георгијевић • Збирка задатака-Математика 4, Збирка задатака и тестова за IV разред гимназија и техничких школа (десето прерађено издање), Круг, Београд, 2010, Живорад Ивановић, Срђан Игњановић.
Корелација (међупредметно и унутарпредметно повезивање)	Обезбеђена је међупредметна повезаност предмета: математика, физика.
Кључни појмови	– дужина лука криве – одређени интеграл – први извод функције – диференцијал функције – смена променљиве
Евалуација испланираног након остваривања.	– 7-минутна формативна процена на zzzish квизу. – вршњачка евалуација у паровима на непосредном часу – анализом домаћег задатка на следећем часу

УВОДНИ ДЕО ЧАСА (5 минута)

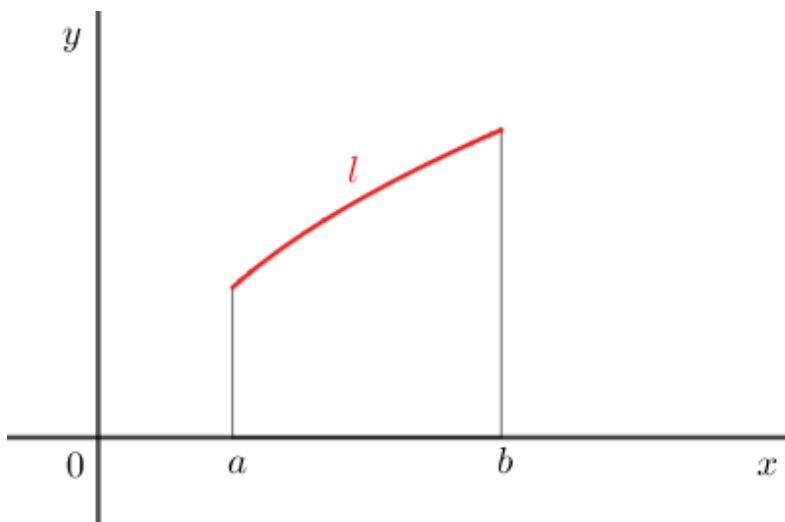
У уводном делу часа ученицима приказујемо презентацију.

Кроз презентацију уводимо формулацију теореме која се односи на израчунавање дужине лука криве, и обнављамо са ученицима претходна знања која су неопходна за успешно решавање задатака.

Теорема:

Дужина лука криве l који представља график функције $y = f(x)$ непрекидне и диференцијабилне на сегменту $[a, b]$ између тачака чије су апсцисе $x = a$ и $x = b$, ($a < b$) је:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$



ГЛАВНИ ДЕО ЧАСА (35 минута)

У главном делу часа решавамо задатке. Прва два задатка решавамо на табли.

Задатак 1.

Израчунати дужину лука криве $y = \ln(2 \sin x)$ за $x \in \left[a, \frac{\pi}{2}\right], a > 0$.

$$y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$$

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_a^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{(\cos x)^2}{(\sin x)^2}} dx = \int_a^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{(\sin x)^2 + (\cos x)^2}{(\sin x)^2}} dx = \\ &= \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \int_{\operatorname{tg} \frac{a}{2}}^1 \frac{dt}{t} = \ln 1 - \ln \operatorname{tg} \frac{a}{2} = -\ln \operatorname{tg} \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Задатак 2.

Израчунати дужину криве која представља график функције $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$.

$$Df: x - x^2 \geq 0, \quad x \geq 0, \quad -1 \leq \sqrt{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow x \in [0, 1]$$

$$y' = \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1 - x}} = \frac{1 - x}{\sqrt{x(1 - x)}} = \sqrt{\frac{(1 - x)^2}{x(1 - x)}} = \sqrt{\frac{1 - x}{x}}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1 - x}{x}} dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2$$

Затим ученици решавају квиз Ректификација (quizalize.com). Задатак који се налази унутар квиза (**Задатак 3**) ученици треба детаљно да реше у својим свескама. Сваки ученик, након што реши задатак, треба са својим паром из клупе да замени свеске, провери тачност задатка, и напише одговарајући коментар (штикира уколико је задатак тачно решен или исправи евентуалне грешке оловком друге боје).

Задатак 3.

Применом одређеног интеграла израчунати дужину лука криве $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ од тачке са апсцисом $x = 0$ до тачке за коју је $x = 8$.

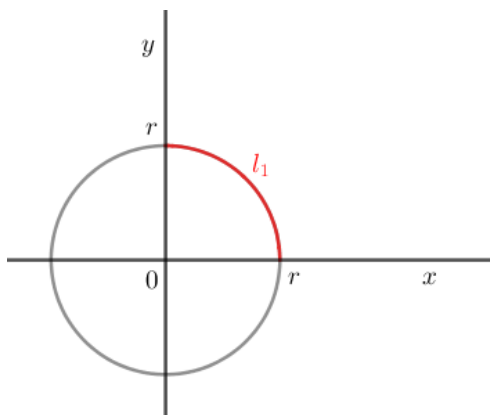
$$y' = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^8 \sqrt{1 + x} dx = 2 \int_1^3 t^2 dt = \frac{2}{3} (3^3 - 1^3) = \frac{52}{3}$$

Затим наставник изводи ученика испред табле. Ученик уз сугестије наставника, решава четврти задатак.

Задатак 4.

Применом интегралног рачуна извести образац за обим кржне линије $x^2 + y^2 = r^2$



$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

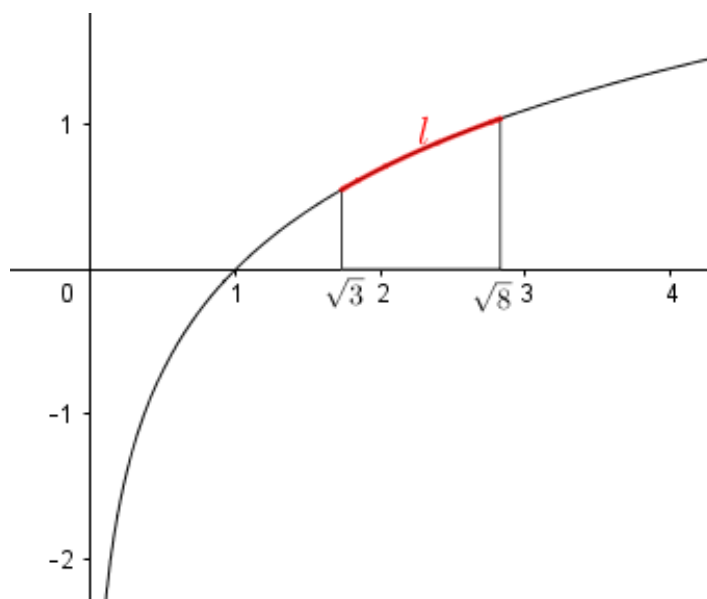
$$l = 4l_1$$

$$\begin{aligned}
 l &= 4 \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = 4 \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = 4r \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\
 &= 4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{rcost}{\sqrt{r^2(1 - (\sin t)^2)}} dt = 4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 2r\pi
 \end{aligned}$$

Задатак 5.

Израчунати дужину лука криве $y = \ln x$ од тачке чија је апсциса $\sqrt{3}$ до тачке чија је апсциса $\sqrt{8}$.

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{x} \\
 l &= \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx \\
 l &= \int_2^3 \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = \int_2^3 dt + \int_2^3 \frac{dt}{t^2 - 1} \\
 l &= 1 + \int_2^3 \frac{1}{(t - 1)(t + 1)} dt = 1 + \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{dt}{t - 1} - \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{dt}{t + 1} = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$



ЗАВРШНИ ДЕО ЧАСА (5 минута)

Понављамо са ученицима шта смо на овом часу научили. Отклањамо евентуалне нејасноће у раду. Напомињемо да за следећи час треба да ураде домаћи задатак који се налази на завршном слајду презентације.

Домаћи задатак:

1. Израчунати дужину лука криве $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ од тачке чија је апсциса $x = 0$ до тачке чија је апсциса $x = 8$.
2. Израчунати дужину лука криве $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$ од тачке чија је апсциса $x = 1$ до тачке чија је апсциса $x = e$.

Изглед табле:

Дужина лука криве

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

1. $y = \ln(2 \sin x), \quad 0 < a \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$

$$y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$$

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_a^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{(\cos x)^2}{(\sin x)^2}} dx = \int_a^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{(\sin x)^2 + (\cos x)^2}{(\sin x)^2}} dx \\ &= \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \int_{\operatorname{tg} \frac{a}{2}}^1 \frac{dt}{t} = \ln 1 - \ln \operatorname{tg} \frac{a}{2} = -\ln \operatorname{tg} \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Смена: } \operatorname{tg} \frac{x}{2} &= t \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{aligned}$$

2. $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}.$

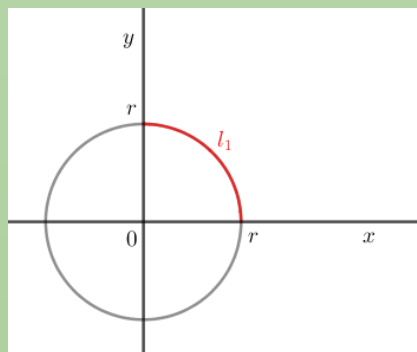
$$Df: x - x^2 \geq 0, \quad x \geq 0, \quad -1 \leq \sqrt{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow x \in [0, 1]$$

$$y' = \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1 - x}} = \frac{1 - x}{\sqrt{x(1 - x)}} = \sqrt{\frac{(1 - x)^2}{x(1 - x)}} = \sqrt{\frac{1 - x}{x}}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1 - x}{x}} dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2$$

4. $x^2 + y^2 = r^2$



$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\begin{aligned} l &= 4 \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = 4 \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = \\ &= 4r \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{rcost}{\sqrt{r^2(1 - (\sint)^2)}} dt = 4r \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 2r\pi \end{aligned}$$

Смена: $x = rsint$
 $dx = rcostdt$

5. $y = \ln x; \quad x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$

$$y' = \frac{1}{x}$$

Смена: $1 + x^2 = t^2$
 $xdx = tdt$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx$$

$$l = \int_2^3 \frac{t^2}{t^2 - 1} dt = \int_2^3 dt + \int_2^3 \frac{dt}{t^2 - 1}$$

$$l = 1 + \int_2^3 \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt = 1 + \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{dt}{t+1} = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$$