Pismena vežba iz Analize sa Algebrom, I grupa

Milomir Stefanović

Oktobar 18, 2016

1.

$$z = \frac{(1+i)^8}{(1+i\sqrt{3})^9} \tag{1}$$

$$z = \frac{(\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4}))^8}{(2cis(-\frac{\pi}{3}))^9} \tag{2}$$

$$z = \frac{2^4 cis(2\pi)}{2^9 cis(-3\pi)} = \frac{2^4}{-2^9} \tag{3}$$

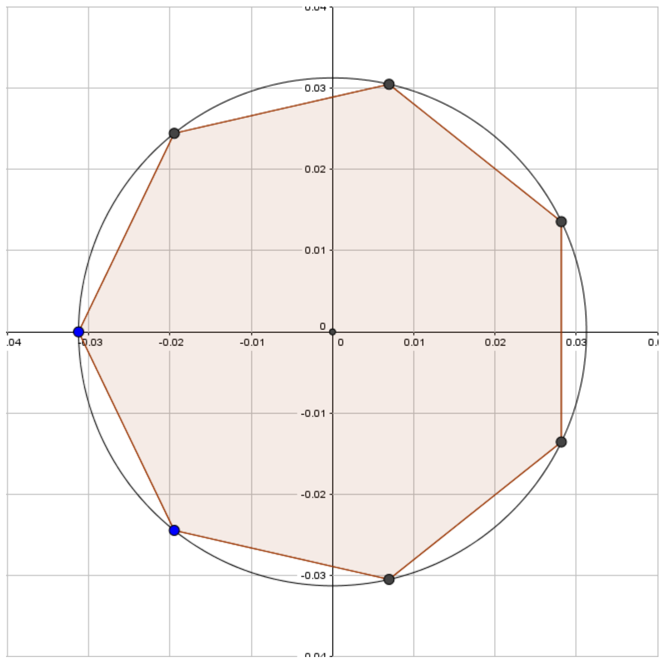
$$z = -\frac{1}{2^5} \tag{4}$$

$$z = -\frac{1}{32} \tag{5}$$

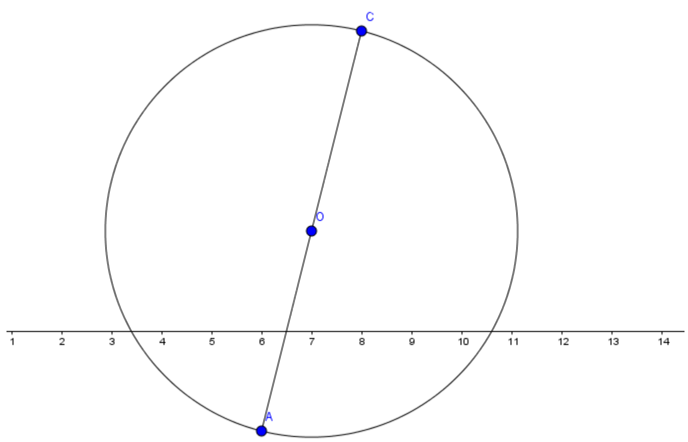
Tako da su sedmi koreni broja z:

$$z = -\frac{1}{32} cis\left(\frac{2k\pi}{7}\right) \tag{6}$$

Rešenja se grafički mogu predstaviti ovako:

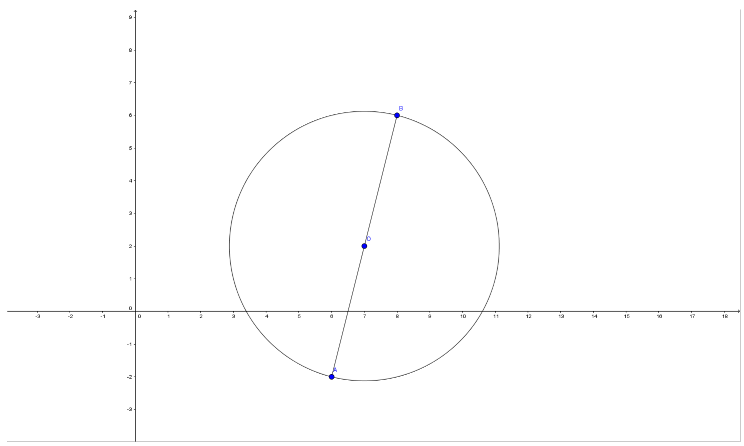


2. Dijagonala AB prolazi kroz O, onda je $|X_0 - X_B| = |X_0 - X_A|$ i $|Y_0 - Y_B| = |Y_0 - Y_A|$, onda se lako mogu izračunati i koordinate tačke A koje iz navedenih formula iznose: $X_A = 6$ i $Y_A = -2$.



Tada se tačke C i D nalaze na kružnici u centru sa tačkom O čiji je prečnik duž AB, te je jednačine ove kružnice:

$$(x-7)^2 + (y-2)^2 = \sqrt{4^2 + 1^2}^2 = 17 \tag{1}$$



Takođe ove tačke nalaze se na simetrali duži AB. Jednačina ove prave odgovara jednačini prave normale na duž AB u tački O. Kako je potrebno odrediti jednačinu ove prave prvo moramo odrediti jednačinu prave koja sadrži A i B.

$$y = kx + n \tag{2}$$

$$6 = 8k + n \tag{3}$$

$$-2 = 6k + n \tag{4}$$

Oduzimajući jednačine (3) i (4) dobija se

$$8 = 2k \tag{5}$$

$$k = 4 \tag{6}$$

Sada se može izračunati n

$$6 = 4 \cdot 8 + n \tag{7}$$

$$n = 26 \tag{8}$$

Tada je jednačina prave AB

$$-4x + y = -26 \tag{9}$$

Te je jednačina normale na tu pravu

$$x + 4y = n \tag{10}$$

Kako jedno rešenje jedanačine (10) mora biti tačka 0 onda je:

$$n = 7 + 4 \cdot 2 = 15 \tag{11}$$

Tada se tačke C i D nalaze kao rešenja sistema jednačina (1) i (11)
Iz jednačine (11) promenljivu x možemo zapisati kao:

$$x = 15 - 4y \tag{12}$$

Ubacujući jednačinu (12) u jednačinu (1) dobijamo:

$$(15 - 4y - 7)^2 + (y - 2)^2 = 17 \tag{13}$$

$$(8 - 4y)^2 + (y - 2)^2 = 17 \tag{14}$$

$$(-4(y - 2))^2 + (y - 2)^2 = 17 \tag{15}$$

$$16(y - 2)^2 + (y - 2)^2 = 17 \tag{16}$$

$$17(y - 2)^2 = 17 \tag{17}$$

$$(y - 2)^2 = 1 \tag{18}$$

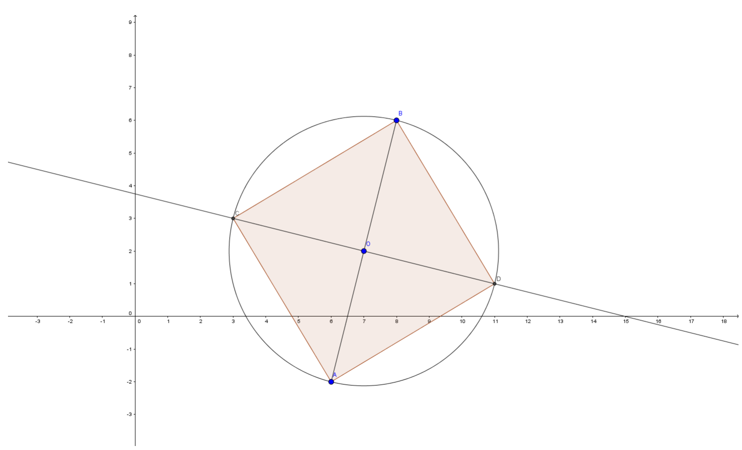
$$y - 2 = 1 \Rightarrow y = 3 \tag{19}$$

$$y - 2 = -1 \Rightarrow y = 1 \tag{20}$$

Te se sada iz jednačine (12) mogu izračunati X koordinate i to kao

$$x = 15 - 4 \cdot 3 \Rightarrow x = 3 \tag{21}$$

$$x = 15 - 4 \cdot 1 \Rightarrow x = 11 \tag{22}$$



Te su koordinate temena kvadrata: $A(6,-2)$, $B(11,1)$, $C(8,6)$ i $D(3,3)$

3. Kako je
$$z^5 = (1-z)^5 \tag{1}$$
onda deljenjem jednačine sa z^5 dobija se
$$1 = \left(\frac{1-z}{z}\right)^5 \tag{2}$$
Odatle je
$$\left(\frac{1-z}{z}\right) = cis\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \tag{3}$$
Pomnoživši celu jednačinu sa z dobija se:
$$1-z = z\cdot cis\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \tag{4}$$
$$1 = z\left(1+\cdot cis\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\right) \tag{5}$$
$$z = \frac{1}{1+cis\left(\frac{2k\pi}{5}\right)} \tag{6}$$

4. Zapravo u zadatku se traži vrednost polinoma za $cis(\frac{\pi}{3})$, te je:
$$p(z) = cis\left(\frac{4\pi}{3}\right) + cis\left(\frac{3\pi}{3}\right) + cis\left(\frac{2\pi}{3}\right) + cis\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} p(z) = &\left(cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{3\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &+ i\left(sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + sin\left(\frac{3\pi}{3}\right) + sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right. \\ &\left. + sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + 1 \end{aligned} \tag{2}$$

$$p(z) = \left(-\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 \tag{3}$$
$$p(z) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow p(z) = cis\left(\frac{2\pi}{3}\right) \tag{4}$$