Prva kragujevačka gimnazija

Furijeove Transformacije

Nikola Mandić, IV$_{sm}$

mentor
Jasmina Micić

Kragujevac, Maj 2016.

Sadržaj

1 Furijeovi redovi

1.1 Uvod

Furijeova [1] analiza je oblast u matematici koja je veoma primenljiva u drugim naučnim granama (obrade signala, električna kola, ...), i bavi se funkcijama koje se mogu predstaviti kao beskonačne sume trigonometrijskih funkcija, i na taj način se aproksimirati. Furijeove transofrmacije se mogu primeniti na neperiodične funkcije, pa ćemo krenuti od jednostavnije transformacije, a to su Furijeovi redovi, koji se odnose na periodične funkcije.

Uopštena trigonometrijska funkcija ima oblik $g(x) = \alpha \sin(\phi x + \beta)$, i period ove funkcije je $2\pi/\phi$. Ona može biti transformisana

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha \sin(\phi x + \beta) = \alpha(\sin(\phi x)\cos\beta + \cos(\phi x)\sin\beta) = \\ &\alpha \sin\beta\cos(\phi x) + \alpha\cos\beta\sin(\phi x) = A\cos(\phi x) + B\sin(\phi x), \end{aligned}$$

što znači da svaku trigonometrijsku funkciju možemo predstaviti takođe u ovom obliku, koji je korisniji, i može se upotrebiti za konstrukciju sume. Prebacimo se sada na funkcije f perioda 1 koje treba razložiti na beskonačne sume. Interesuju nas koeficijenti ϕ oblika $2\pi n$, dakle $f(x) = a\cos(2\pi nx) + b\sin(2\pi nx)$ gde je n ceo broj. Period ovako definisane funkcije je upravo 1, dakle važi $f(x) = f(x+1)$. Suma koju bismo konstrusali je

$$S = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx).$$

Poznate činjenice

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

iskoristićemo da zapišemo ovu sumu i kao

$$S = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{2\pi ikx},$$

što je upravo osnova za Furijeov red. Zapravo, sam red se dobija kada granice sume teže besnonačnosti, odnosno od $-\infty$ do ∞. Primetimo da je član sume c_0 realan broj, ne utiče na prvi izvod funkcije, dakle ponaša se kao konstanta koja reguliše funkciju po y-osi.

[1] Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), francuski matematičar u čiju čast je ova analiza nazvana

I dalje nema formalne definicije, pa koristimo pretpostavku da dobru aproksimaciju funkcije perioda 1 možemo napisati kao sumu S, i treba odgovoriti na pitanje čemu bi bili jednaki koeficijenti c_n. Neka je

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi inx}.$$

Ako izdvojimo c_k iz ove sume, dobijamo

$$c_k e^{2\pi ikx} = f(x) - \sum_{n=-N, n\neq k}^{N} c_n e^{2\pi inx} \Rightarrow$$
$$c_k = f(x)e^{-2\pi ikx} - \sum_{n=-N, n\neq k}^{N} c_n e^{2\pi i(n-k)x}$$

Ključno je primetiti da je integral kompleksne funkcije $e^{2\pi imx}$, gde je m ceo broj, u granicama od 0 do 1 jednak nuli. Ovo važi, jer je $e^{2\pi imx} = 1$, i

$$\int_0^1 e^{2\pi imx} dx = \frac{1}{2\pi im} e^{2\pi imx}\Big|_0^1 = \frac{1}{2\pi im}(e^{2\pi im} - e^0) = 0.$$

Dakle, integracijom izraza za c_k, suma se gubi, te imamo

$$\int_0^1 c_k dx = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx} dx, \text{ odnosno}$$
$$c_k = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx} dx.$$

Primetimo da su funkcije $f(x)$ i $e^{-2\pi ikx}$ periodične sa periodom 1, pa je i njihov proizvod isto. Odatle zaključujemo da granice integracije mogu uopšteno uzeti oblik a i $a+1$, odnosno

$$c_k = \int_a^{a+1} f(x)e^{-2\pi ikx} dx.$$

Konačno imamo ideju šta bi bio Furijeov red, te možemo konstruisati formalnu definiciju. Čitalac treba imati na umu da je prethodna veza izvedena pomoću pretpostavke, te je samo okvir za razmišljanje, i još uvek nikakva formalna definicija ili teorema.

1.2 Definicija

Sada ćemo izložiti formalnu definiciju Furijeovog reda, i teoremu koja garantuje kvalitet aproksimacije, čiji je dokaz izostavljen, zbog svoje obimnosti.

Najpre definišimo novi pojam, koji je važan za Furijeov red, a to je prostor kvadratno-integrabilnih funkcija. $L^2([0,1])$ je skup svih kompleksnih funkcija f koje imaju konačan integral kvadrata modula na intervalu $[0,1]$. Drugim rečima, treba da je ispunjeno

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_0^1 f(x)\overline{f(x)} dx < \infty.$$

Integral koji smo upravo iskoristili, predstavlja približnost funkcije koja bi trebalo da teži 0 na intervalu $[0,1]$, pa ćemo **koren ovog integrala** upamtiti i kao $\|f(x)\|$, odnosno kao *kvadratnu normalnu formu* funkcije f. Ovaj integral nam može odgovoriti na pitanje koliko je dobra aproksimacija Furijeovog reda za datu funkciju, pri čemu ćemo posmatrati razliku date funkcije i njenog reda. Takođe ćemo od sad pisati koeficijente c_n kao $\hat{f}(n)$.

Definicija 1.1. *Neka je f periodična funkcija sa periodom 1, i neka je $f \in L^2([0,1])$. Furijeov red date funkcije je suma*

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

gde je N neki prirodan broj. Pri tom neka je $\hat{f}(n)$ definisano kao

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

Interesantno svojstvo koeficijenata $\hat{f}(n)$: važi da je $\hat{f}(-n) = \overline{\hat{f}(n)}$, jer je

$$\hat{f}(-n) = \int_0^1 f(x) e^{2\pi i n x} dx = \int_0^1 f(x)\overline{e^{-2\pi i n x}} dx = \int_0^1 \overline{f(x) e^{-2\pi i n x}} dx = \overline{\int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx} = \overline{\hat{f}(n)}.$$

Ovo, naravno, važi samo za realne funkcije f, što je i iskorišćeno u izvođenju. Primetimo i da je $\hat{f}(0) = \overline{\hat{f}(0)}$, dakle $f(0) \in \mathbb{R}$, što nam je poznato i od ranije.

Tek sada treba govoriti i o aproksimaciji. Furijeov red je, kako se ispostavlja, veoma dobra trigonometrijska aproksimacija za ovakvu klasu funkcija f. O tome i govori sledeća teorema, čiji je dokaz zbog svoje složenosti izostavljen, što je već napomenuto.

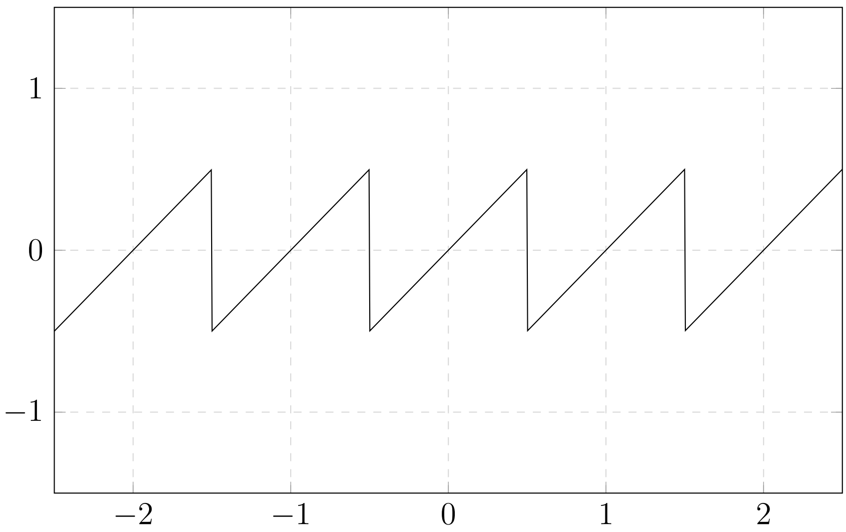
Teorema 1.1. *Kvadratna normalna forma razlike date funkcije i Furijeovog reda konvergira kako $N \to \infty$. Drugim rečima*

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} \right\| = 0.$$

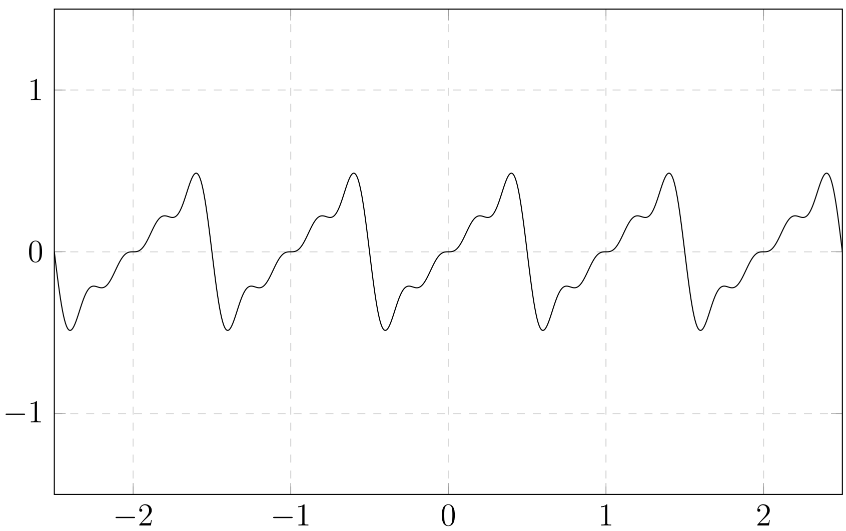
1.3 Primene

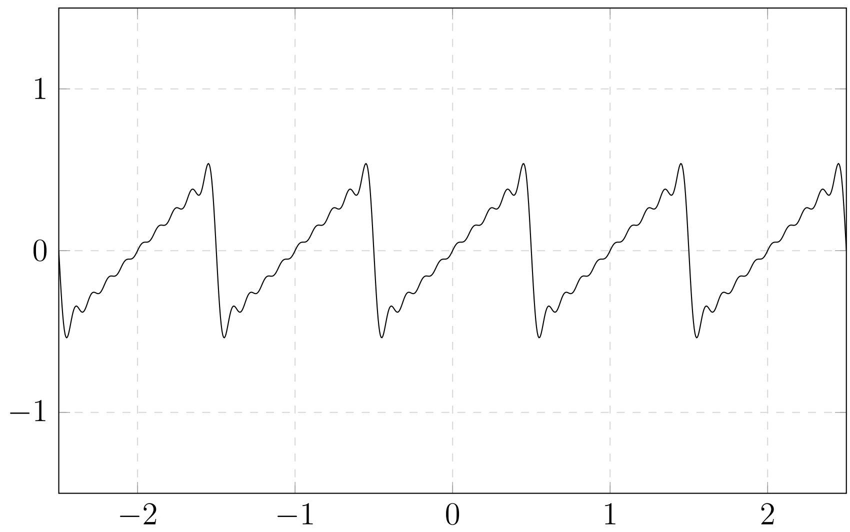
Do sada smo govorili o definiciji i valjanosti aproksimacije Furijeovog reda, a sada slede primeri Furijeovih suma za neke konkretne periodične funkcije i neke konkretne primene u algebri.

Posmatrajmo funkciju f sa periodom 1 takvu da je $f(x) = x$, za $x \in [-1/2, 1/2)$. Grafik ove funkcije dat je na slici ispod.



Sada posmatrajmo grafike funkcija Furijeovog reda funkcije f za vrednosti N redom 4 i 9. Da se podsetimo, N je stepen trigonometrijskoj polinoma Furijeovog reda, dakle, broj do kog računamo eksponencijalne vrednosti u sumi.





Jasno je da se preciznost povećava kako N raste, što je i bila tvrdnja teoreme 1.1.

Pomenimo sada jedno važno tvrđenje vezano za Furijeov red, a to je Parsevalov [2] identitet.

Teorema 1.2. *Data je periodična funkcija f perioda 1 i pritom $f \in L^2([0,1])$. Neka su $\hat{f}(n)$ Furijeovi koeficijenti funkcije f. Važi*

$$\|f\|^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2.$$

Dokaz je izostavljen, ali se bazira na posmatranju skupa $L^2([0,1])$ kao vektorskog prostora, preko čega se uvode neki vektorski operatori nad funkcijama koje pripadaju ovom skupu. Uglavnom se oslanja na skalarni priozvod definisan nad ovakvim funkcijama. Pomoću Parsevalovog identiteta, možemo izvesti neke interesantne zaključke o broju π. Ovde su predstavljeni neki od tih zaključaka i njihova izvođenja.

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{1}$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \tag{2}$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \tag{3}$$

[2] Marc-Antoine Parseval (1755-1836), francuski matematičar

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^8}=\frac{\pi^8}{9450} \tag{4}$$

Jednakost (1) izvodimo na sledeći način. Najpre posmatrajmo funkciju $f(x) = x$, za $x \in [-1/2, 1/2)$. Ona ispunjava uslove Parsevalove teoreme, te nam ostaje da izračunamo $\hat{f}(n)$. To postižemo ovako

$$\hat{f}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} xe^{-2\pi inx}dx, \quad \text{što dobijamo iz parcijalne integracije}$$

$$\int xe^{-2\pi inx}dx + \int \frac{1}{-2\pi in}e^{-2\pi inx}dx = x\frac{1}{-2\pi in}e^{-2\pi inx}$$

$$\int xe^{-2\pi inx}dx - \frac{1}{4\pi^2n^2}e^{-2\pi inx} + C = x\frac{1}{-2\pi in}e^{-2\pi inx}$$

$$\int xe^{-2\pi inx}dx = x\frac{1}{-2\pi in}e^{-2\pi inx} + \frac{1}{4\pi^2n^2}e^{-2\pi inx} + C, \quad \text{određeni integral}$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} xe^{-2\pi inx}dx = \left(x\frac{1}{-2\pi in}e^{-2\pi inx} + \frac{1}{4\pi^2n^2}e^{-2\pi inx}\right)\Bigg|_{-1/2}^{1/2}.$$

Nakon malo sređivanja desne strane i izračunavanja koja se svode na trivijalna, dobijamo da je

$$\hat{f}(n) = \frac{i(-1)^n}{2\pi n}$$

$$|\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{4\pi^2n^2}.$$

Posebnu pažnju obratimo na $\hat{f}(0)$, koje **ne možemo izračunati integracijom**, već zaključujemo da je $\hat{f}(0) = 0$. Sumiranje ovih vrednosti, dobijamo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi^2}2\sum_{n=1,n\neq 0}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Ova suma je po Parsevalovom identitetu jednaka integralu $\|f\|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} x^2dx = 2\int_0^{1/2} x^2dx = 1/12$. Konačno

$$\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{12} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ostale jednakosti možemo pokazati na sličan način, posmatrajući redom funkcije x^2, x^3 i x^4, sa osnovnim periodom na intervalu $[-1/2, 1/2)$. Upotrebom Parsevalove teoreme i računanjem integrala može se analogno dovršiti kao jednakost (1).

Napomenimo da funkcija koja jeste periodična, ali ne sa periodom jednakim 1, takođe može generisati Furijeov red. Naime, posmatrajmo funkciju g takvu da je $g(x) = g(x+p)$, dakle period ove funkcije je p. Neka je funkcija f takva da je $f(x) = g(px)$, kao i $f(x/p) = g(x)$. Za funkciju f važi

$$f(x+1) = g(p(x+1)) = g(px+p) = g(px) = f(x)$$

odnosno period funkcije f je jednak 1. Zato je Furijeov red funkcije f već definisan, i iskoristićemo ga za konstruisanje reda funkcije g. Imamo da je

$$g(x) = f\left(\frac{x}{p}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx/p}.$$

Takođe, treba izraziti koeficijente c_n preko funckije g, i to ovako

$$c_n = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx = \int_0^1 g(px)e^{-2\pi inx}dx =$$
$$\frac{1}{p}\int_0^p g(y)e^{-2\pi iny/p}dy \quad \text{(menjamo integraciju)} = \frac{1}{p}\int_a^{a+p} g(x)e^{-2\pi inx/p}dx.$$

Bilo koji realan broj a možemo uzeti zbog periodičnosti funkcija $g(x)$ i $e^{-2\pi inx/p}$ sa periodom p, pa tako i njihovog proizvoda. Izveden je upravo opšti oblik Furijeovog reda za fukcije koje ne moraju imati period 1, već bilo koji realan broj koji nije 0, naravno. Evo i primera gde se to može često upotrebiti: funkcija sa periodom 2π. Ovaj period imaju sve trigonometrijske funkcije, te je česta pojava. U tom slučaju, imamo funkciju $g(x) = g(x+2\pi)$, i posmatrajmo njen Furijeov red.

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-inx}dx$$

Ovaj oblik Furijeovog reda je, uslovno rečeno, jednostavan, i može olakšati integraciju za izračunavanje Furijeovih koeficijenata.

Za kraj, treba istaći da je Furijeov red najbolja trigonometrijska aproksimacija date funkcije. Formalnije, ovo znači da za svaki prioradn broj N i bilo koji skup kompleksnih koeficijenata α_n važi nejednakost

$$\left\| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{2\pi inx} \right\| \leq \left\| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e^{2\pi inx} \right\|.$$

Dokaz ove činjenice takođe koristi vektorski prostor funkcija $L^2([0,1])$, i neke tvrdnje koje važe u njemu. Nećemo skretati sa teme i prikazati dokaz (koji je takođe obiman), ali je važno istaći ovu teoremu.

2 Furijeove transformacije

2.1 Primer i definicija

Do sada smo se bavili periodičnim funkcija, i njihovim Furijeovim redovima. Furijeova transformacija se primenjuje na neperiodične funkcije, pa pokušajmo da primenimo Furijeov red na neperiodičnu funkciju koju ćemo aproksimirati na periodičnu, ali takvu da njen period teži ∞. Sledeća funkcija trebalo bi da idealno opiše postupak kojim se intuitivno dolazi do ideje za Furijeovu transformaciju.

Posmatrajmo funkciju Π, takozvanu "pravougaonik" funkciju, definisanu na sledeći način.

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{za } |x| > 1/2 \end{cases}$$

Jasno je da ova funkcija nije periodična, ali ima jedinstven oblik na intervalu $[-1/2, 1/2]$ koji se može iskoristiti za formiranje perioda. Konstruišimo funkciju f takvu da je njen period jedank $p > 1$ i da je jednaka funkciji Π na intervalu $[-p/2, p/2]$. Njen Furijeov red i koeficijenti su dati

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx/p}$$

$$c_n = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)e^{-2\pi inx/p}dx = \frac{1}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(x)e^{-2\pi inx/p}dx.$$

Ako se Furijeovi koeficijenti predstave preko funkcije Π dobija se

$$c_n = \frac{1}{p}\int_{-p/2}^{p/2} \Pi(x)e^{-2\pi inx/p}dx = \frac{1}{p}\int_{-1/2}^{1/2} 1 \cdot e^{-2\pi inx/p}dx =$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{1}{-2\pi in/p}e^{-2\pi inx/p}\right)\Bigg|_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{2\pi in}(e^{\pi in/p} - e^{-\pi in/p}) = \frac{1}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{p}\right).$$

Ovde smo koristili činjenicu da je funkcija jednaka nuli na intervalu $[-p/2, p/2]$ van podintervala $[-1/2, 1/2]$, gde je funkcija jednaka 1. Takođe, poslednji korak je pojednostavljen činjenicom koja je izložena ranije. Sada uvedimo funkciju $\hat{f}(x)$ (podsetimo se da smo ovu notaciju koristili pre za Furijeove koeficijente), takvu da je

$$\hat{f}\left(\frac{n}{p}\right) = pc_n.$$

Povezujući ovo sa datim primerom, dobijamo

$$\hat{f}\left(\frac{n}{p}\right) = \frac{p}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi}{p}\right) = \frac{\sin(n\pi/p)}{n\pi/p}.$$

Konačno, menjajući $x = n/p$

$$\hat{f}(x) = \frac{sin(\pi x)}{\pi x}.$$

Ovo upravo jeste Furijeova transformacija funkcije Π, pa ćemo pisati i $\hat{\Pi}(x) = \frac{sin(\pi x)}{\pi x}$.

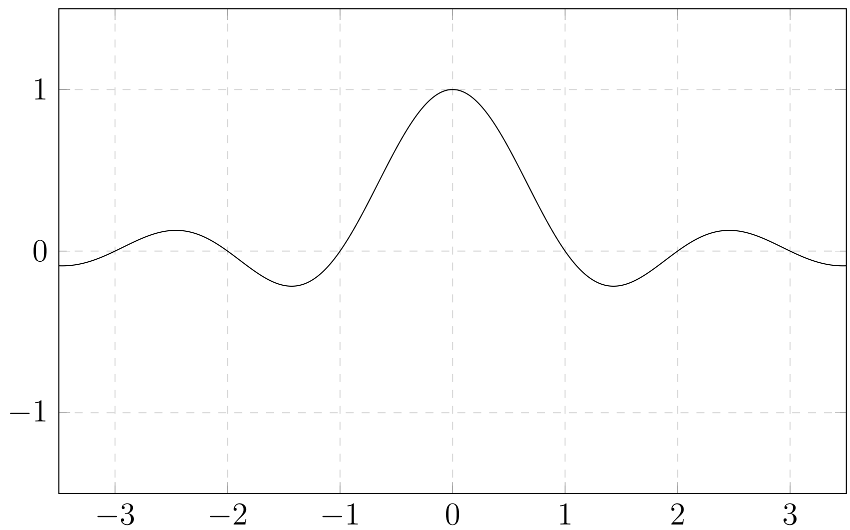
Postavlja se pitanje kako bi izgledala transformacija u opštem slučaju. Ideja je ista kao malopre

$$\hat{f}\left(\frac{n}{p}\right) = pc_n = p\frac{1}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(x)e^{-2\pi inx/p}dx \Rightarrow \hat{f}(k) = \int_{-p/2}^{p/2} f(x)e^{-2\pi ikx}dx$$

Kako je p veliko, slobodno menjajući $p/2 \to \infty$

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ikx}dx.$$

Na slici ispod prikazan je grafik transformacije funkcije Π.



Primetimo da u tački nula funkcija $\hat{f}$ nije definisana, ali je možemo dodefinisati poznatim pravilom

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

i uzeti na taj način $\hat{f}(0) = 1$.

Na ovom primeru je pokazana ideja za formiranje transformacije, a sledi i formalna definicija.

Definicija 2.1. *Data je funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. *Furijeova transformacija funkcije* f *je funkcija* $\hat{f}$ *definisana sa*

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ikx}dx.$$

Specijalno, transformacija u tački nula je jednaka

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

a to je ustvari površina ispod grafika na celom domenu funkcije. Kasnije ćemo diskutovati o tome kada je Furijeova transformacija uopšte definisana, tj. kada je definisan ovaj integral. Postoje razne notacije za transformaciju, najčešće se u literaturi čitalac može sreći sa $\hat{f}(x)$ ili $\mathscr{F}f(x)$. Pokušajmo sada da rekonstruišemo početnu funkciju iz njene transformacije. Za potrebe izračunavanja, uvedimo smenu $t_n = n/p$. Poznato nam je da je $\hat{f}(t_n) = pc_n$, pa ponovo pišemo "veštački" Furijeov red funkcije f

$$f(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi ink/p} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{p}\hat{f}\left(\frac{n}{p}\right) e^{2\pi ink/p} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{p}\hat{f}(t_n)e^{2\pi it_nk} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(t_n)e^{2\pi it_nk}\Delta t \approx \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{2\pi ikt}dt.$$

Ovde smo uzeli da je $\Delta t = 1/p$, i poslednju sumu posmatrali kao Rimanovu [3] sumu koja aproksimira finalni integral. Upravo smo konstruisali novu transformaciju, koju ćemo zvati *inverzna Furijeova transformacija* jer je ona u suštini inverzna funkcija Furijeove transformacije, sa notacijom $\check{f}(x)$ ili $\mathscr{F}^{-1}f(x)$. Ovo predstavlja novu teoremu, koja daje interesantnu jednakost kao zaključak.

Teorema 2.1 (Teorema o Furijeovoj inveziji)**.** *Data je funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. *Definišimo transformacije* $\mathscr{F}$ *i* $\mathscr{F}^{-1}$ *sa*

$$\mathscr{F}f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ikx}dx$$

$$\mathscr{F}^{-1}f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi ikx}dx$$

Važe sledeće činjenice

- $\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}f(x) = f(x)$

[3] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), nemački matematičar, dao veoma značajne rezultate u analizi

- $\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}f(x) = f(x)$

Pseudo dokaz prve činjenice već je dat, s tim što nije rigorozno izveden, za šta bi trebalo dosta napora. Ukoliko prvu činjenicu napišemo u integralskom obliku, dobijamo sledeću jednakost.

Posledica 2.1. *Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ važi*

$$f(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(\alpha - x)y} f(x) dx dy$$

Ovo su bile neke osnovne tvrdnje vezane za Furijeovu transformaciju, bez kojih ne bismo mogli u dalju diskusiju.

2.2 Osobine

Najpre treba diskutovati o tome kada je definisana Furijeova transformacija date funkcije. Prisetimo se Furijeovog reda, kada smo govorili o prostoru L^2. Furijeova transofmracija je uvek definisana za funkcije $f \in L^2(\mathbb{R})$. Naravno, postoje i druge klase funkcija za koje je Furijeova transformacija defisana, ali ova je posebno interesantna zbog toga što i sama transformacija pripada prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

Dokaz o definisanosti $\mathscr{F}$ i $\mathscr{F}^{-1}$ je komplikovaniji, i nećemo ga izvoditi, ali navodimo sledeće trvrđenje sa skicom dokaza.

Teorema 2.2. *Data je funkcija $f \in L^2(\mathbb{R})$. Tada važi i $\mathscr{F}f \in L^2(\mathbb{R})$. Štaviše, važi*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}f(x)|^2 dx.$$

Dokaz. Skica dokaza se zasniva na Furijeovom redu. Posmatrajmo red periodizovane funkcije f sa velikim periodom p. Uvedimo i smenu $t_n = n/p$. Iz Parsevalovog identiteta imamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \approx \int_{-p/2}^{p/2} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\left|\mathscr{F}f(\frac{n}{p})\right|^2}{p^2} =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\mathscr{F}f(t_n)\right|^2 \Delta t \approx \int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathscr{F}f(x)\right|^2 dx.$$

Primetiti da je za beskonačno malu veličinu uzeto $\Delta t = p^{-2}$. □

Teorema 2.2 je ekvivalent Parsevalovog identiteta za Furijeov red, zato se i za nju kaže da je Parsevalova teorema. Suština teoreme je da je norma funkcije invarijantna u odnosu na transformaciju i inverznu transformaciju.

Ona takođe garantuje da transformacija ostaje u $L^2(\mathbb{R})$, tako da postoji i njena transformacija. To znači da se Furijeova transformacija ili inverzija mogu primeniti proizvoljan broj puta na funckiju iz $L^2(\mathbb{R})$.

Furijeova transformacija je *linearna transformacija.* To znači da su ispunjeni sledeći uslovi:

$$\mathscr{F}(f+g)(x) = \mathscr{F}f(x) + \mathscr{F}g(x)$$

$$\mathscr{F}(\alpha f)(x) = \alpha \mathscr{F}f(x)$$

Ovo važi za bilo koje $\alpha \in \mathbb{C}$. Ove osobine direktno slede iz osobina integrala

$$\mathscr{F}(f+g)(n) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x)+g(x))e^{-2\pi inx}dx =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi inx}dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2\pi inx}dx = \mathscr{F}f(n) + \mathscr{F}g(n)$$

$$\mathscr{F}(\alpha f)(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x)e^{-2\pi inx}dx =$$
$$\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi inx}dx = \alpha \mathscr{F}f(n).$$

Takođe, važe i ova tvrđenja koja se jednostavno dokazuju:

$$f(t) \rightleftharpoons F(s) \Rightarrow f(t+b) \rightleftharpoons e^{2\pi isb}F(s)$$

$$f(t) \rightleftharpoons F(s) \Rightarrow f(at) \rightleftharpoons \frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Ovde je prvi put upotrebljena notacija $\rightleftharpoons$ koja označava da je funkcija sa desne strane (u ovom slučaju F) Furijeova transformacija funckije sa leve strane (u ovom slučaju f).

Još jedna značajna osobina koju treba pomenuti u ovom kontekstu je invarijantnost distribucije u odnosu na Furijeovu transformaciju. Konkretnu funkciju distribucije uzećemo za

$$f(x) = e^{-\pi x^2}, \text{ pri tom imajmo na umu čuveni Gausov integral}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

Sa ovim integralom mogli ste se sresti u verovatnoći, gde je on veoma zastpuljen. Nećemo skretati s teme i računati ga, ali čitalac može pokušati da ga izračuna pomoću dvostrukog integrala i prebacivanja u polarne koordinate. Uz pomoć Gausovog integrala, lako se dobija da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}dx = 1.$$

Pokušajmo sada da pronađemo Furijeovu transformaciju funkcije f.

$$\mathscr{F}f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi itx} dx$$

Diferenciranjem po promenljivoj t, dobijamo

$$\frac{d}{dt}\mathscr{F}f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}(-2\pi ix)e^{-2\pi itx} dx.$$

Ovaj oblik je pogodan za parcijalnu integraciju, gde je $u = e^{-2\pi itx}$ i $dv = -2\pi ixe^{-\pi x^2}dx$, dakle $v = ie^{-\pi x^2}$, i $du = -2\pi ite^{-2\pi itx}dx$. Proizvod uv teži nuli u tačkama $-\infty$ i ∞, te imamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}(-2\pi ix)e^{-2\pi itx}dx + \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi te^{-\pi x^2}e^{-2\pi itx}dx = 0, \quad \text{odnosno}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}(-2\pi ix)e^{-2\pi itx}dx = -2\pi t\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}e^{-2\pi itx}dx = -2\pi t\mathscr{F}f(t)$$

Dobili smo jednostavnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d}{dt}\mathscr{F}f(t) = -2\pi t\mathscr{F}f(t)$$

čije jedinstveno rešenje je

$$\mathscr{F}f(t) = \mathscr{F}f(0)e^{-\pi t^2}.$$

Takođe, poznato je da je

$$\mathscr{F}f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

odakle dobijamo konačno rešenje

$$\mathscr{F}f(t) = e^{-\pi t^2}.$$

Primetimo i da je polazna funkcija $f(x) = e^{-\pi x^2}$, zaključujemo $f(x) = \mathscr{F}f(x)$, te je funkcija $e^{-\pi x^2}$ invarijantna u odnosu na Furijeovu transformaciju.

2.3 Primene

Furijeove transformacije su veoma značajan alat u mnogim naukama, prvenstveno u fizici. Cilj rada je da prikaže primene u matematici, pa ćemo se ograničiti na takve. Najpre treba pomenuti upotrebu Furijeovih transformacija kod diferencijalnih jednačina.

Diferencijalne jednačine Veoma važna činjenica vezana za Furijeove transformacije koja može pomoći kod rešavanja diferencijalnih jednačina je iskazana u sledećoj teoremi.

Teorema 2.3. *Za funkciju f i njenu Furijeovu transformaciju važi*

$$\left(\mathscr{F}\frac{d}{dx}f(x)\right)(k) = 2\pi ik(\mathscr{F}f)(k).$$

Takođe važi formula za više izvode

$$(\mathscr{F}f^{(n)})(k) = (2\pi ik)^n(\mathscr{F}f)(k).$$

Dokaz. Furijeova transformacija prvog izvoda funkcije jednaka je

$$\left(\mathscr{F}\frac{d}{dx}f(x)\right)(k) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}f(x)e^{-2\pi ikx}dx = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi ikx}df(x).$$

Ovo je pogodno za parcijalnu integraciju, gde je $u = e^{-2\pi ikx}$ i $v = f(x)$; imamo $du = -2\pi ike^{-2\pi ikx}dx$ i $dv = df(x)$. U krajnjim tačkama, proizvod uv teži nuli, jer $f(x) \to 0$ za $x \to \pm\infty$ (inače ne bi bila definisana Furijeova transformacija ove funkcije). Odatle imamo

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi ikx}df(x) + \int_{-\infty}^{\infty}-2\pi ikf(x)e^{-2\pi ikx}dx = 0 \Rightarrow$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi ikx}df(x) = 2\pi ik\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-2\pi ikx}dx \Rightarrow$$
$$\left(\mathscr{F}\frac{d}{dx}f(x)\right)(k) = 2\pi ik(\mathscr{F}f)(k)$$

Formule višeg stepena se dokazuju pomoću matematičke indukcije, sa korakom sličnim izvođenju prvog stepena. □

Sada je jasno da Furijeova transformacija može olakšati rešavanje mnogih diferencijalnih jednačina, a pogotovo onih oblika

$$a_nf^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + a_1f^{(1)} + a_0f = s.$$

Ako primenimo Furijeovu transformaciju na ovakvu jednačinu, dobijamo (u funkciji od t)

$$\mathscr{F}(a_nf^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + a_1f^{(1)} + a_0f) = \mathscr{F}s \Rightarrow$$
$$(\mathscr{F}f)(t)\cdot(a_n(2\pi it)^n + a_{n-1}(2\pi it)^{n-1} + \cdots + 2a_1\pi it + a_0) = (\mathscr{F}s)(t)$$

Jednim korakom, izbačeni su svi izvodi iz diferencijalne jednačine. Za rešavanje uprošćene jednačine uvodi se konvolucija dve funkcije, odnsno $f * g$. Konvolucija se definiše kao integral

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx.$$

Važno svojstvo konvolucije je da je Furijeova transformacija konvolucije jednaka proizvodu Furijeovih transformacija pojedinačnih funkcija, odnosno

$$\mathscr{F}(f * g)(t) = (\mathscr{F} f(t))(\mathscr{F} g(t)).$$

Nećemo zalaziti u detalje o konvoluciji, već samo pokazati konkretnu primeni pri rešavanju diferencijalne jednačine.

Posmatrajmo sledeću diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{d^2}{dx^2}y - y = -f.$$

Primenimo Furijeovu transformaciju i dobijamo

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\frac{d^2}{dx^2}y - \mathscr{F}y &= \mathscr{F}(-f) \\
(2\pi i x)^2 \mathscr{F}y - \mathscr{F}y &= \mathscr{F}(-f) \\
\mathscr{F}y(-4\pi^2x^2 - 1) &= \mathscr{F}(-f) \\
\mathscr{F}y &= \frac{1}{1+4\pi^2x^2}\mathscr{F}f.
\end{aligned}$$

Uz malo truda, dobijamo da je $1/(1+4\pi^2x^2)$ Furijeova transformacija funckije $e^{-|x|}/2$, te stičemo uslove za konvoluciju

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}y &= \left(\mathscr{F}\frac{e^{-|x|}}{2}\right)(\mathscr{F}f) \\
y(x) &= \frac{e^{-|x|}}{2} * f(x)
\end{aligned}$$

Konačno, predstavljanjem konvolucije preko integrala, dobijamo rešenje polazne jednačine

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|t-x|}}{2} f(x)dx.$$

Snaga Furijeovih transformacija je pokazana na ovom primeru, gde je diferencijalna jednačina u potpunosti rešena nestandardno, putem transformacije. Mnogi drugi problemi vezani za diferencijalne jednačine imaju teško elementarno rešenje dok primenom Furijeove transformacije svodimo problem na jednostavan, koji zatim vraćamo u početni okvir primenom inverzne transformacije.

Sada će biti reči o *diskretnoj Furijeovoj transformaciji.* Ona je veoma značajna za moderni svet, čije funkcionisanje u velikoj meri zavisi od računara, a svi znamo da računari, bar za sad, rade sa konačnim vrednostima. Zato je važno da pri obradi slika i zvuka, gde Furijeove transformacije imaju veoma bitnu ulogu (nećemo zalaziti u fiziku iza ovoga) kompjuter može da pamti diskretne vrednosti na osnovu kojih precizno rekonstruiše samu transformaciju.

Diskretna Furijeova transformacija Najpre će mo definisati transformaciju kao algoritam, koji za unetih N brojeva vraća takođe N brojeva. Od ovih brojeva ćemo konstruisati vektore u N dimenzija, pri čemu su dimenzije indeksirane od 0.

Definicija 2.2. *Dat je vektor* $\mathbf{f} = (\mathbf{f}[0], \mathbf{f}[1], \ldots, \mathbf{f}[N-1])$. *Diskretna Furijeova transformacija vektora* $\mathbf{f}$ *je vektor* $\mathbf{F} = (\mathbf{F}[0], \mathbf{F}[1], \ldots, \mathbf{F}[N-1])$ *takav da važi*

$$\mathbf{F}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{f}[n] e^{-2\pi i m n/N}, \quad m = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Brojevi $\mathbf{f}[n]$ mogu biti i kompleksni, mada su u praktičnoj upotrebi uglavnom realni. Brojevi $\mathbf{F}[m]$ su kompleksni. Diskretna Furijeova transformacija predstavlja aproksimaciju Furijeove transformacije u diskretnom skupu tačaka koje su zadate. Važno je napomenuti da diskretna transformacija zadržava neka svojstva kontinualne, od kojih ćemo spomenuti Parsevalov identitet. Parsevalov identitet za diskretnu Furijeovu transformaciju obezbeđuje sledeću jednakost

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\mathbf{f}[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\mathbf{F}[m]|^2.$$

Kao što Furijeova transformacija ima analognu diskretnu, tako i inverzna Furijeova transformacija ima analognu diskretnu, u sledećemo obliku:

$$\mathbf{f}[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{F}[m] e^{2\pi i m n/N}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Uvedimo i pojam diskretne konvolucije, koji je značajan kod množenja Furijeovih transformacija. Konvolucija vektora $\mathbf{f}$ i $\mathbf{g}$ dimenzija N je vektor $\mathbf{f} * \mathbf{g}$ takođe sa N dimenzija takav da važi

$$(\mathbf{f} * \mathbf{g})[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{f}[n] \mathbf{g}[(k-n) \bmod N],$$

pri čemu je $c = a \bmod b \iff 0 \le c < b \land c \equiv a \pmod{b}$. Diskretna konvolucija zadržava suštinsku osobinu kontinualne, a to znači da je diskretna Furijeova transformacija konvolucije jednaka proizvodu diskretnih Furijeovih transformacija pojedinačnih funkcija.

Jednostavnim pristupom možemo izvršiti algoritam diskretne Furijeove transformacije u vremenskoj složenosti $O(N^2)$, gde je N broj dimenzija ulaznog vektora $\mathbf{f}$. Međutim, još je Gaus u 19. veku otkrio algoritam koji nalazi diskretnu Furijeovu transformaciju u vremenskoj složenosti $O(N \log N)$ (podrazumeva se logaritam za osnovu 2). Njegovo otkriće je, nažalost ostalo nezapaženo, sve do nezavisnog ponovnog otkrića algoritma od strane matematičara Džejmsa Kulija [4] i Džona Takija [5]. Njihov algoritam, poznatiji i kao *Kuli-Taki FFT algoritam* je objašnjen u sledećem paragrafu.

Kuli-Taki FFT algoritam Najpre zapišimo definiciju diskretne Furijeove transofmracije.

$$\mathbf{F}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{f}[n] e^{-2\pi i n m / N}$$

Za potrebe algoritma uzećemo da je N stepen broja 2, inače možemo slobodno proširiti $\mathbf{f}$ na broj dimenzija koji je stepen 2, i veći od N. Jasno je da ako postavimo dodate brojeve na 0, Furijeova transformacija će ostati nepromenjena. Ključ algoritma je podela niza na parne i neparne indekse, za koje ćemo računati Furijeovu transformaciju odvojeno. Naime

$$\mathbf{F}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{f}[n] e^{-2\pi i n k / N} = \sum_{n=0}^{N/2-1} \mathbf{f}[2n] e^{-2\pi i (2n) k / N} + \sum_{m=0}^{N/2-1} \mathbf{f}[2m+1] e^{-2\pi i (2m+1) k / N}$$

$$\mathbf{F}[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} \mathbf{f}[2n] e^{-2\pi i n k / (N/2)} + e^{-2\pi i k / N} \sum_{m=0}^{N/2-1} \mathbf{f}[2m+1] e^{-2\pi i m k / (N/2)}$$

Ovde uočavamo jasnu rekurentnu vezu. Pišimo nadalje prvu sumu (sa parnim indeksima) kao E_k, i drugu sumu (sa neparnim indeksima) kao O_k. Jasno je da važi $E_{k+N/2} = E_k$ i $O_{k+N/2} = O_k$ (zbog osobina eksponencijalne funkcije). Imamo sledeće rekurentne relacije, koje važe za $0 \le k < N/2$.

$$\mathbf{F}[k] = E_k + e^{-2\pi i k / N} O_k$$

$$\mathbf{F}\left[k + \frac{N}{2}\right] = E_{k+N/2} + e^{-2\pi i (k+N/2)/N} O_k =$$

$$E_k + e^{-2\pi i k / N} e^{-\pi i} O_k = E_k - e^{-2\pi i k / N} O_k$$

[4]James William Cooley (1926-), američki matematičar

[5]John Wilder Tukey (1915-2000), američki matematičar

Ovo u potpunosti pokriva indekse $0, 1, \ldots, N-1$, što znači da je algoritam kompletan. Potrebno je konstruisati rekurziju koja nalazi diskretne Furijeove transformacije podnizova, od kojih sklapa diskretnu Furijeovu transformaciju celog niza. Napomenimo da se inverzina Furijeova transformacija računa veoma sličnim algoritmom u istoj vremenskoj složenosti.

Algoritam 1: Kuli-Taki FFT algoritam

Data: Niz brojeva $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$
Result: Niz brojeva $X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}$
Function $X_0, X_1, \ldots, X_{N-1} \leftarrow$ *FFT(x, N, s)*
    if $N = 1$ **then**
        $X_0 \leftarrow x_0$
    else
        $X_0, X_1, \ldots X_{N/2-1} \leftarrow FFT(x, N/2, 2s)$
        $X_{N/2}, X_{N/2+1}, \ldots X_{N-1} \leftarrow FFT(x+s, N/2, 2s)$
        for $k \leftarrow 0$ **to** $N/2-1$ **do**
            $a \leftarrow X_k$
            $b \leftarrow X_{k+N/2}$
            $X_k \leftarrow a + e^{-2\pi ik/N} b$
            $X_{k+N/2} \leftarrow a - e^{-2\pi ik/N} b$
        end
    end
end

Za kraj navodimo dve primene ovog algoritma u čistoj matematici, a to su brzo množenje polinoma, i brzo množenje velikih brojeva. Ove dve operacije imaju trivijalnu složenost $O(nm)$, gde su n i m stepeni polinoma ili dužine brojeva koji se množe. Zapravo, ove dve operacije mogu se smatrati za ekvivalentne, jer broj možemo posmatrati kao polinom $p(x)$, gde je x baza u kojoj se posmatra dati broj. Na primer, broj $(12034)_{10}$ je ekvivalentan polinomu $p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x + 4$, za $x = 10$. Kada množimo dva polinoma, rezultat se uz malu modifikaciju ponaša kao njihova konvolucija, ukoliko ih posmatramo kao vektore. To je jasno iz definicije konvolucije koja je veoma slična koeficijentima polinoma koji se dobija množenjem.

Dakle, predpostavimo da su nam dati polinomi a i b. Oni su dati u obliku $a(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, i $b(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$. Od njih konstruišimo vektore **a** i **b**, dimenzija $N = deg(a) + deg(b) + 1 =$

$n + m + 1$, takve da važi

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})$$
$$\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})$$

pri tom uzimamo da su nepostojeći koeficijenti u ovim polinomima jednaki nuli. Jasno je da će njihov proizvod, polinom c biti stepena $N-1$, zbog toga podešavamo

$$c_k = \sum_{n=0, k-n \geq 0}^{N-1} a_n b_{k-n} = \sum_{l=0}^{N-1} a_l b_{(k-l) \bmod N}, \quad k = 0, 1, \ldots N-1.$$

Ovo važi, zato što su svi koeficijenti polinoma b jednaki nuli za $l > k$ u poslednjoj sumi. Ovo možemo protumačiti kao konvoluciju

$$\mathbf{c}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{a}[n]\mathbf{b}[(k-n) \bmod N], \quad k = 0, 1, \ldots N-1.$$

Zbog toga imamo

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} * \mathbf{b}$$
$$\mathscr{F}\mathbf{c} = \mathscr{F}\mathbf{a}\mathscr{F}\mathbf{b}$$
$$\mathbf{c} = \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}\mathbf{a}\mathscr{F}\mathbf{b}).$$

Ovime smo u potpunosti rekonstruisali polinom c iz inverzne Furijeove transformacije proizvoda Furijeovih transformacija polioma a i b. Ovde možemo za Furijeovu transformaciju primeniti FFT algoritam, i izračunati na taj način proizvod dva polinoma u složenosti $O(NlogN)$, gde je N reda veličine $deg(a) + deg(b)$.

3 Reference

[1] Prof. William G. Faris. Fourier Transforms. *University of Arizona Materials*, 2008.

[2] Prof. David Jerison. 18.103 Fourier Analysis, Fall 2013. *Massachusetts Institute of Technology Materials*, 2013.

[3] Prof. Brad Osgood. Lecture notes for EE 261, the Fourier transform and its applications. *Stanford Univesity Materials*, 2007.

[4] Wikipedia. Fourier series.

[5] Wikipedia. Fourier transform.