

7/9/2015. g.

## Zagonetna funkcija

Danilo Đokić, <djokicd@outlook.com>

Prva kragujevačka gimnazija - IVsm

**Problem.** Odrediti takvu **neprekidnu i diferencijabilnu** funkciju  $f$ , tako da njen grafik sadrži tačke  $A(-2, -1)$ ,  $B(2, 1)$  i  $C(6, -1)$  i da površina koju zaklapaju grafik i  $Ox$  osa, bude manja od 1.99.

**Rešenje.** Tačke grafika imaju analitički smisao u vidu sistema uslova:

$$\Sigma_1 \begin{cases} f(-2) = -1 \\ f(2) = 1 \\ f(6) = -1 \end{cases}$$

Neka je  $g := f(x+2), \forall x \in \mathbb{R}$ . Tada je sistem uslova  $\Sigma_1$ , ekvivalentan sistemu uslova:

$$\Sigma_2 \begin{cases} g(-4) = f(-4+2) = -1 \\ g(0) = f(4-2) = 1 \\ g(+4) = f(8-2) = -1 \end{cases}$$

Kako je  $g(4) = g(-4)$  to funkcija  $g$  može biti parna. Posmatrajmo funkciju:  $\frac{\sin x}{x}$ , poznato je da je  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \wedge \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ . Poznajući ovo odaberimo funkciju  $h(x)$  tako da važi:  $\lim_{x \rightarrow 0} h(0) = 1 \wedge \lim_{x \rightarrow \pm\infty} = -1$  metodom neodređenih koeficijenata nad izrazom:

$$h(x) = \alpha \frac{\sin x}{x} + \beta$$

Kako je na osnovu predhodnog  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \alpha + \beta$  i  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \beta$ , jasno se dobija  $(\alpha, \beta) = (2, -1)$ . Posmatrajmo sada funkciju  $h(\gamma x)$  i metodom neodređenih koeficijenata opet odredimo koeficijent  $\gamma \neq 0$  tako da funkcija  $h(\gamma x)$  ispunjava sve uslove sistema  $\Sigma_2$ , a kako je  $h(x)$  parna funkcija, to je potreban i dovoljan uslov:

$$h(4\gamma) = -1 \iff 2 \frac{\sin 4\gamma}{4\gamma} = 0 \quad \therefore 4\gamma = k\pi \quad \therefore \gamma = \frac{k\pi}{4}, k \neq 0$$

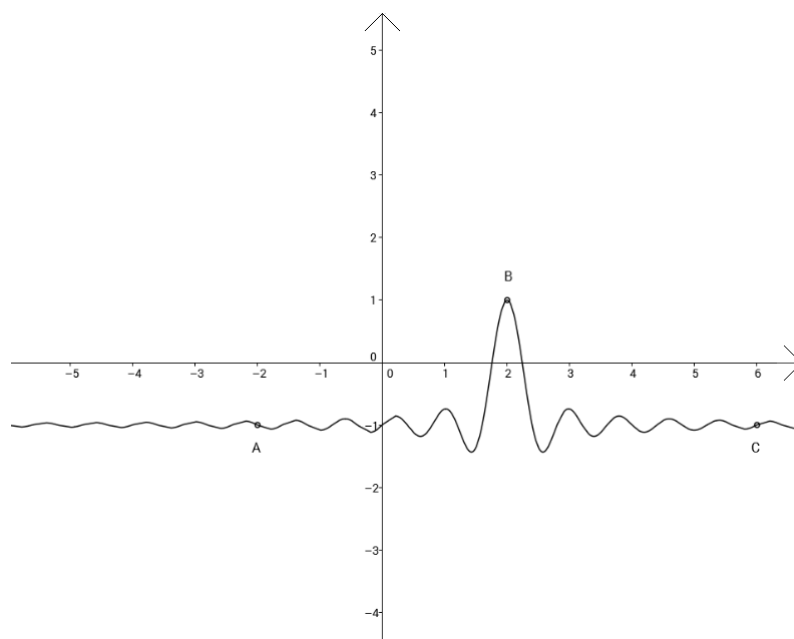
Konačno kako sve uslove sistema uslova  $\Sigma_2$  ispunjava funkcija  $h(\gamma x)$ , a važi  $g(x) = f(x+2) \therefore f(x) = g(x-2)$  konačno dobijamo funkciju  $f$  kao:

$$f(x) = 2 \frac{\sin \frac{k\pi}{4}(x-2)}{\frac{k\pi}{4}(x-2)} - 1$$

Konačno uslov površine se može ispuniti uzimanjem velike vrednosti  $k$ , na osnovu geometrijskog smisla tog parametra površina koju zaklapaju  $Ox$  osa i grafik funkcije postaje mala. Tako na primer  $k = 10$  ispunjava sve uslove zadatka.

$$f(x) = 2 \frac{\sin \frac{10\pi}{4}(x-2)}{\frac{10\pi}{4}(x-2)} - 1$$

Na slici na narednoj strani prikazan je grafik funkcije  $f$ .



Grafik funkcije  $f$  za  $k = 10$