

ПРИПРЕМА ЗА II ПИСМЕНИ ИЗ АНАЛИЗЕ СА АЛГЕБРОМ

1. задатак

Решавање алгебарских једначина треће и четвртог степена.

• У скупу комплексних бројева решити једначину:

(а) $x^3 - 6x + 9 = 0$; (б) $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$;

(в) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 8x - 12 = 0$; (г) $3x^4 - 4x^3 + 1 = 0$.

НАПОМЕНА. Једначина (г) не мора да се решава Фераријевом методом. Наиме, ако уочимо да је $x_1 = 1$ једно решење дате једначине, после дељења полинома $3x^4 - 4x^3 + 1$ са $x - 1$:

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

остаје да пронађемо корене x_2, x_3, x_4 полинома $3x^3 - x^2 - x - 1$. Међутим, број $x_2 = 1$ је такође корен и последњег полинома, па су x_3 и x_4 корени количника који се добија дељењем полинома $3x^3 - x^2 - x - 1$ са $x - 1$,

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ \hline & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array},$$

тј. полинома $3x^2 + 2x + 1$. Решења једначине $3x^2 + 2x + 1 = 0$ су $x_{3,4} = \frac{-2 \pm i2\sqrt{2}}{6} = \frac{-1 \pm i\sqrt{2}}{3}$.

Дакле, сва комплексна решења дате једначине су $x_1 = x_2 = 1$ (двоструко решење), $x_3 = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{3}$ и $x_4 = \frac{-1 - i\sqrt{2}}{3}$.

2. задатак

Системи једначина вишег реда.

• У скупу комплексних бројева решити систем једначина:

$$\begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ \text{(а) } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad ; \quad \text{(б) } \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 \end{array} \\ xy + xz + yz = 27 \end{array}$$

3. задатак

Својства непрекидности уређеног поља реалних бројева.

- Архимедово својство скупа реалних бројева (Теорема 4, 59. стр.)
- Мултипликативна варијанта Архимедовог својства (Задатак 8, 64. стр.)
- Канторова теорема (Задатак 32, 73. стр.; потпуно решење овог задатака треба да садржи и доказ Теореме 7, 64. стр.)

4. задатак

Супремум и инфимум подскупова скупа реалних бројева

- Дат је скуп $A = \{\log(n+1) - \log n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(а) Доказати да је супремум скупа A ирационалан број, а затим, применом децималског поступка, израчунати приближну вредност овог броја на две децимале.

(б) Одредити инфимум скупа A .

РЕШЕЊЕ. Нека је $a_n = \log(n+1) - \log n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Како је

$$1 + \frac{1}{1} > 1 + \frac{1}{2} > 1 + \frac{1}{3} > 1 + \frac{1}{4} > \dots$$

а $\log$ растућа функција, имамо да је

$$\log\left(1 + \frac{1}{1}\right) > \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) > \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) > \log\left(1 + \frac{1}{4}\right) > \dots,$$

па је низ a_n , $n \in \mathbb{N}$, опадајући. Дакле, супремум скупа A је, у овом случају, највећи елемент овог скупа, тј. $\log 2$.

Докажимо да је $\log 2$ ирационалан број.

Претпоставимо да је $\log 2$ рационалан број, тј. (будући да је $\log 2 > 0$) да је $\log 2 = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Тада је $2 = 10^{\frac{p}{q}}$, одакле је $2^q = 2^p \cdot 5^p$, што је немогуће према Основној теореме аритметике (сваки природан број се на јединствен начин, до на редослед фактора, може раставити на производ простих чинилаца). Дакле, $\log 2$ је ирационалан број.

Израчунајмо $\log 2$ на две децимале.

Нека је $a = \log 2$. Тада је, по дефиницији логаритма, $10^a = 2$. Како је $1 = 10^0 < 10^a = 2 < 10^1 = 10$, имамо да је $0 < a < 1$, тј. $a_0 = [a] = 0$. Тада је $a = a_0 + \frac{a_1}{10} = \frac{a_1}{10}$, за неко a_1 , па је

$$10^{\frac{a_1}{10}} = 2, \text{ тј. } 10^{a_1} = 2^{10} = 1024.$$

Будући да је

$$10^3 = 1000 < 10^{a_1} = 1024 < 10^4 = 10000,$$

имамо да је $a_1 = 3 + \frac{a_2}{10}$, за неко a_2 , па је

$$10^{3+\frac{a_2}{10}} = 1024 \text{ тј. } 10^{a_2} = (1,024)^{10}.$$

Како је

$$1 = 10^0 < 10^{a_2} = (1,024)^{10} < 10^1,$$

имамо да је $a_2 = 0 + \frac{a_3}{10}$, за неко a_3 . Дакле,

$$a = 0 + \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{a_3}{1000} \approx 0,30.$$

(б) Како је $\log x > 0$, за $x > 1$, имамо да је 0 (као и сваки негативан реалан број) доње ограничење скупа A : за сваки природан број n важи $a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$, тј.

$$1^\circ \quad (\forall a \in A) a > 0.$$

Доказаћемо да за сваки позитиван број ε постоји елемент a из A да је $a < \varepsilon$.

Заправо, треба доказати да се за сваки позитиван реалан број ε постоји природан број n такав да је $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \varepsilon$, тј. да је $\frac{1}{n} < 10^\varepsilon - 1$.

Нека је $\varepsilon > 0$. Тада је и $\varepsilon_1 = 10^\varepsilon - 1 > 0$. Према Архимедовој теореме постоји природан број n такав да је

$$\frac{1}{n} < \varepsilon_1, \text{ тј. } \frac{1}{n} < 10^\varepsilon - 1,$$

одакле је

$$1 + \frac{1}{n} < 10^\varepsilon, \text{ тј. } \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \varepsilon.$$

Дакле,

$$2^\circ \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A) a < \varepsilon.$$

Из 1° и 2° следи да је $\inf A = 0$.

• Дат је скуп $A = \{ \sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n} \mid n \in \mathbb{N} \}$.

(а) Доказати да је супремум скупа A ирационалан број, а затим, применом децималског поступка, израчунати приближну вредност овог броја на једну децималу.

(б) Одредити инфимум скупа A .

РЕШЕЊЕ. Нека је

$$a_n = \sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n} = \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)^3} + \sqrt[4]{(n+1)^2n} + \sqrt[4]{(n+1)n^2} + \sqrt[4]{n^3}},$$

$n \in \mathbb{N}$. Ако се број n повећава, број a_n је све мањи, па је

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots$$

опадајући низ. Дакле, супремум скупа A је, у овом случају, највећи елемент овог скупа, тј. $\sqrt[4]{2} - 1$.

Докажимо да је $\sqrt[4]{2} - 1$ ирационалан број.

Довољно је доказати да је $\sqrt[4]{2}$ ирационалан број. Претпоставимо да је $\sqrt[4]{2}$ рационалан број, тј. (будући да је $\sqrt[4]{2} > 0$) да је $\sqrt[4]{2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$ и $\text{nzd}(p, q) = 1$. Тада је $2q^4 = p^4$, па $2 \mid p^4$, а како је 2 прост број, следи и $2 \mid p$, па је $p = 2k$, за неки природан број k . Сада из $2q^4 = 16k^4$, тј. $q^4 = 8k^4$ следи да $2 \mid q^4$, па и $2 \mid q$, што је немогуће, јер је $\text{nzd}(p, q) = 1$. Дакле, $\sqrt[4]{2}$ је ирационалан број, па је и $\sqrt[4]{2} - 1$ један такав број.

Израчунајмо $\sqrt[4]{2} - 1$ на једну децималу.

Нека је $a = \sqrt[4]{2}$. Тада је $a^4 = 2$. Како је $1^4 = 1 < a^4 = 2 < 2^4 = 16$, имамо да је $1 < a < 2$, тј. $a_0 = [a] = 1$. Тада је $a = a_0 + \frac{a_1}{10} = 1 + \frac{a_1}{10}$, за неко a_1 , па је

$$\left(1 + \frac{a_1}{10}\right)^4 = 2, \quad \text{тј.} \quad 10000 + 4000a_1 + 600a_1^2 + 40a_1^3 + a_1^4 = 20000.$$

Будући да је за $a_1 = 1$,

$$10000 + 4000a_1 + 600a_1^2 + 40a_1^3 + a_1^4 = 14641 < 20000,$$

а за $a_1 = 2$

$$10000 + 4000a_1 + 600a_1^2 + 40a_1^3 + a_1^4 = 20736 > 20000,$$

имамо да је $a_1 = 1 + \frac{a_2}{10}$, за неко a_2 , па је

$$a = 1 + \frac{1}{10} + \frac{a_2}{100} \approx 1,1.$$

Дакле, $\sqrt[4]{2} - 1 \approx 0,1$.

(б) Имамо да за сваки природан број n важи

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)^3} + \sqrt[4]{(n+1)^2n} + \sqrt[4]{(n+1)n^2} + \sqrt[4]{n^3}} > 0,$$

па је 0 (као и сваки негативан реалан број) доње ограничење скупа A :

$$1^\circ \quad (\forall a \in A) a > 0.$$

Доказаћемо да за сваки позитиван број ε постоји елемент a из A да је $a < \varepsilon$.

Заправо, треба доказати да се за сваки позитиван реалан број ε постоји природан број n такав да је

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)^3} + \sqrt[4]{(n+1)^2n} + \sqrt[4]{(n+1)n^2} + \sqrt[4]{n^3}} < \varepsilon.$$

Како за сваки природан број n важи неједнакост

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)^3} + \sqrt[4]{(n+1)^2n} + \sqrt[4]{(n+1)n^2} + \sqrt[4]{n^3}} < \frac{1}{4\sqrt[4]{n^3}},$$

довољно је доказати да за сваки позитиван број ε постоји природан број n такав да је $\frac{1}{4\sqrt[4]{n^3}} < \varepsilon$, тј. $\frac{1}{n} < \sqrt[3]{(4\varepsilon)^4}$.

Нека је $\varepsilon > 0$. Тада је и $\varepsilon_1 = \sqrt[3]{(4\varepsilon)^4} > 0$. Према Архимедовој теорему постоји природан број n такав да је

$$\frac{1}{n} < \varepsilon_1, \quad \text{тј.} \quad \frac{1}{n} < \sqrt[3]{(4\varepsilon)^4},$$

одакле је $\frac{1}{4\sqrt[4]{n^3}} < \varepsilon$, па и

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)^3} + \sqrt[4]{(n+1)^2n} + \sqrt[4]{(n+1)n^2} + \sqrt[4]{n^3}} < \varepsilon.$$

Дакле,

$$2^\circ \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A) a < \varepsilon.$$

Из 1° и 2° следи да је $\inf A = 0$.

5. задатак

Кардинални бројеви $\aleph_0$ и c .

НАПОМЕНЕ. Неки од пребројивих скупова, тј. скупова кардиналности $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$, су:

– $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, 8, \dots\};$

Функција $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$ дата са $f(n) = 2n, n \in \mathbb{N}$, је бијекција.

– $2\mathbb{N} - 1 = \{1, 3, 5, 7, \dots\};$

– $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\};$

Функција $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ дата са $f(n) = n - 1, n \in \mathbb{N}$, је бијекција. Бијекција је и пресликавање $g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ дато са $g(n) = n + 1, n \in \mathbb{N}_0$.

– $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\};$

Функција $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ дата са

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{ако је } n = 1, \\ k, & \text{ако је } n = 2k, \\ -k, & \text{ако је } n = 2k + 1, \end{cases}, k \in \{1, 2, 3, \dots\},$$

је бијекција. Наиме, задатом функцијом елементе скупа $\mathbb{Z}$ ређамо у низ на следећи начин:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$$

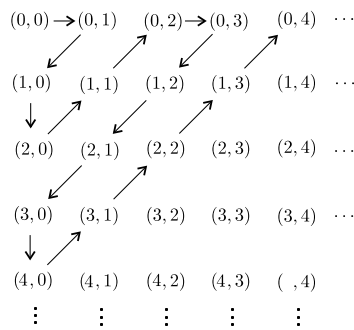
Наћи бар једну бијекцију $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$!

– $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0;$

Функција $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ дата са

$$f(m, n) = 2^m(2n + 1), m, n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

је бијекција. Пресликавање $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ одређено следећим ређањем елемената скупа $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ у низ:



$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ (0,0) & (0,1) & (1,0) & (2,0) & (1,1) & \dots \end{pmatrix}$$

је још један пример бијекције чије постојање даје да је $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ пребројив скуп.

– $\mathbb{Q};$

Неки од непребројивих скупова кардиналности $c = |\mathbb{R}|$, су:

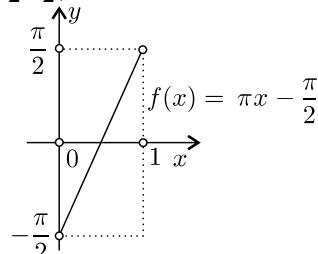
– отворен интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

Функција $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ дата са $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, је бијекција.

Такође, $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

– отворен интервал $(0, 1)$;

Функција $f : (0, 1) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ дата са



$f(x) = \pi x - \frac{\pi}{2}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, је бијекција. Композиција функција

$$f : (0, 1) \xrightarrow{1-1} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{1-1} \mathbb{R},$$

тј. функција $g = \operatorname{tg} \circ f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, дата са $g(x) = \operatorname{tg} \left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$, $x \in (0, 1)$, је такође једна бијекција.

– $(0, +\infty)$;

Функција $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ дата са $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$, је бијекција. Такође,

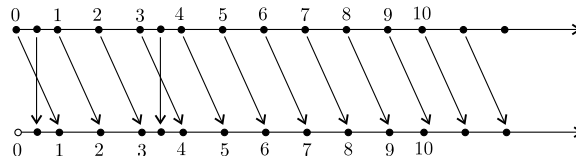
$$g : (0, +\infty) \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}, g(x) = \log_2 x, x > 0.$$

– $[0, +\infty)$;

Функција $f : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ дата са

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in \mathbb{N}_0 \\ x, & x \notin \mathbb{N}_0 \end{cases}, x \in [0, +\infty),$$

је бијекција.

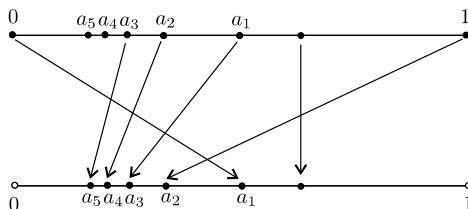


Наћи бар једну бијекцију $g : [0, +\infty) \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$!

– затворен интервал $[0, 1]$;

Нека је $a_n = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ и $D = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ Тада је функција $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ дата са

$$f(x) = \begin{cases} a_1, & x = 0 \\ a_2, & x = 1 \\ a_{n+2}, & x = a_n, n = 1, 2, \dots \\ x, & x \notin D \end{cases}$$



бијекција. **Наћи бар једну бијекцију $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$!**

– скуп ирационалних бројева $\mathbb{I}$.

• Одредити бар једну бијекцију:

- (а) $f : \mathbb{Z} \xrightarrow{1-1} 2\mathbb{N}$; (б) $f : 2\mathbb{N} \xrightarrow{1-1} 2\mathbb{N} - 1$; (в) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$;
 (г) $f : [0, 1] \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$; (д) $f : [-2, 1] \xrightarrow{1-1} (3, 5]$; (ђ) $f : [-2, 1] \xrightarrow{1-1} [3, 5]$;
 (е) $f : [1, +\infty) \xrightarrow{1-1} (-\infty, 1)$; (ж) $f : (-\infty, 0] \xrightarrow{1-1} (0, 1)$; (з)* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$.

• Испитати који су од скупова

- (а) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$;
 (б) скуп свих реалних бројева који су решења неке квадратне једначине са рационалним коефицијентима;
 (в) $(0, 1) \cup \mathbb{Z}$;
 (г) скуп свих реалних бројева који нису корени полинома са рационалним коефицијентима (тзв. трансцендентни бројеви);
 (д) $(0, 1) \cap \mathbb{I}$;
 (ђ) $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$;

пребројиви а који небројиви?